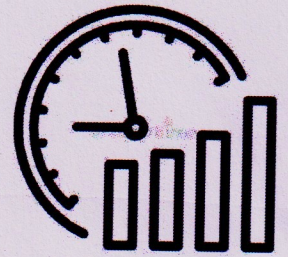


Chapitre 15 : Analyse temporelle des systèmes linéaires continus

I. Introduction

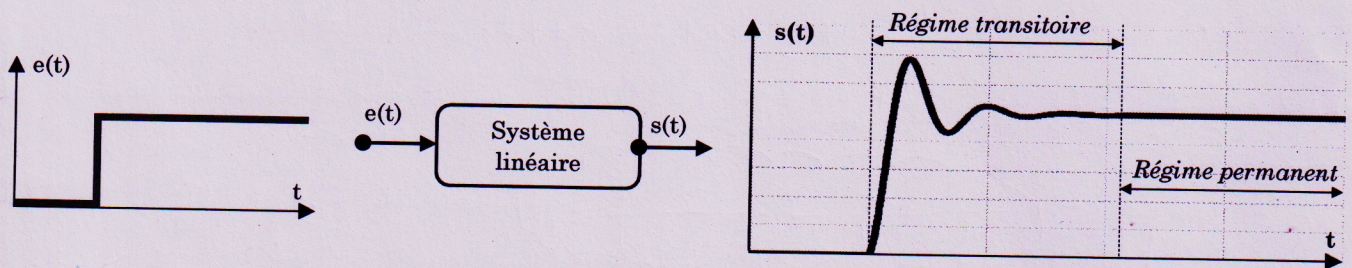
L'analyse temporelle permet de caractériser le comportement transitoire des systèmes linéaires. Ce cours vise à introduire les concepts fondamentaux du régime transitoire et à explorer leurs applications pour évaluer les performances dans ce contexte.

Nous nous concentrerons sur les systèmes du premier et du deuxième ordre, car ils sont couramment rencontrés en pratique. De plus, de nombreux systèmes plus complexes peuvent être approximés par des systèmes d'ordre un ou deux, dont les caractéristiques temporelles sont bien comprises grâce à la connaissance de leur fonction de transfert respective.



II. Analyse temporelle des systèmes linéaires

La réponse temporelle, ou réponse indicielle, est déterminée expérimentalement en excitant le système à un signal d'excitation de type échelon, puis en observant sa réaction.



On distingue deux régimes :

- Le régime transitoire correspond à la phase d'évolution d'un système avant qu'il n'atteigne un état stable, appelé régime permanent. Durant cette période, les grandeurs caractérisant le comportement du système varient.
- Le régime permanent désigne l'état stable du système observable après un certain temps, une fois que le régime transitoire s'est dissipé.

1. Application aux systèmes du premier ordre.

1.1. Définition d'un système du premier ordre

On appelle système du premier ordre, tout système régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

Avec K est le gain statique défini par $K = \frac{s(\infty)}{E}$ et τ est la constante de temps > 0 de même dimension que le temps (heure, minute, seconde)

1.2. Fonction de transfert.

La fonction de transfert du système est obtenue en appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente :

$$\tau \cdot p \cdot S(p) + S(p) = K \cdot E(p)$$

En négligeant les conditions initiales. Ainsi, la fonction de transfert est donnée par $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ ce qui conduit à l'expression suivante :

$$S(p) (1 + \tau p) = K \cdot E(p) \Rightarrow \text{d'où } H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Cette fonction de transfert présente un pôle réel : $\text{soit } 1 + \tau p = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{\tau}$

1.3. Réponse indicielle.

Afin d'évaluer les caractéristiques transitoires, on considère usuellement la réponse indicielle. C'est la réponse à un échelon

$e(t) = E_0 \cdot u(t)$ dont la transformée de Laplace est : $E(p) = \frac{E_0}{p}$

Comme : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow S(p) = H(p) \cdot E(p)$

$$S(p) = \frac{E_0 K}{p(1 + \tau p)}$$

D'après la table des transformées de Laplace inverse, la solution $s(t)$ est de la forme : $s(t) = K \cdot E_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

1.4. Etude de la réponse indicielle

o La valeur initiale : $s_i = \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot \frac{E_0 K}{p(1 + \tau p)} \Rightarrow s_i = 0$

o La valeur finale : $s_f = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p)$

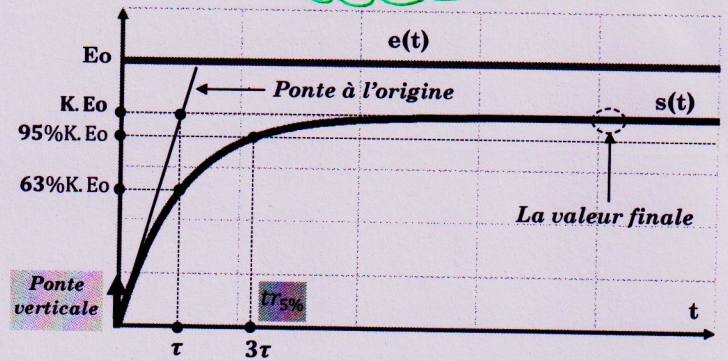
$\Rightarrow S_f = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{E_0 K}{p(1 + \tau p)} \Rightarrow S_f = K \cdot E_0$

Le comportement transitoire d'un système de premier ordre se décrit ainsi :

$\lambda < 0 \Rightarrow K < 1$

o Les points remarquables :

Pour $t = \tau$	$s(t) = 63\% K \cdot E_0$
Pour $t = 3\tau$	$s(t) = 95\% K \cdot E_0$



1.5. Temps de réponse à 5%

Le temps de réponse d'un système est le temps mis par la sortie du système pour entrer dans la bande comprise entre 95% et 105% de sa valeur finale.

Pour un système 1er Ordre : $s(tr_{5\%}) = 95\% K \cdot E_0 \Leftrightarrow K \cdot E_0 (1 - e^{-\frac{tr_{5\%}}{\tau}}) = 0.95 K \cdot E_0 \Leftrightarrow -\frac{tr_{5\%}}{\tau} = \ln(0.05) = -3$

D'où : $tr_{5\%} = 3 \cdot \tau$

Remarques : L'analyse temporelle réalisée ci-dessus a permis de décrire en détail la réponse indicielle d'un système du premier ordre :

- o La réponse transitoire a une forme exponentielle **sans oscillations** (la valeur finale n'est jamais dépassée).
- o Le démarrage commence à zéro avec une montée verticale (pente verticale).
- o Estimation de la durée du régime transitoire à 5% : $tr_{5\%} = 3 \cdot \tau$
- o La valeur finale est donnée par $S_f = K \cdot E_0$.

2. Application aux systèmes de second ordre.

2.1. Définition d'un système 2ème ordre

On appelle système du deuxième ordre, tout système régi par une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

Avec :

- o K : le gain statique $K = \frac{S(\infty)}{E}$
- o ω_n : la pulsation propre du système (rad/s)
- o m : facteur ou coefficient d'amortissement, parfois noté z ou ξ (sans dimension).

2.2. Fonction de transfert.

La fonction de transfert du système est obtenue en appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente, en négligeant les conditions initiales. Ainsi, on obtient :

$$\frac{1}{\omega_n^2} p^2 S(p) + \frac{2m}{\omega_n} p S(p) + S(p) = K E(p)$$

$$\Rightarrow S(p) \left(\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2m}{\omega_n} p + 1 \right) = K E(p)$$

D'où la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

$$H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2m}{\omega_n} p + 1} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2}$$

2.3. Réponse indicielle

Afin d'évaluer les caractéristiques transitoires, on considère usuellement la réponse indicielle. C'est la réponse à un échelon $e(t) = E_0 \cdot u(t)$ dont la transformée de Laplace est : $R(t) = E_0 u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{E_0 \cdot K \omega_n^2}{p(p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2)}$$

o La valeur initiale S_i : $S_i = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) \Rightarrow S_i = 0$

o La valeur finale S_f : $S_f = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) \Rightarrow S_f = K \cdot E_0$

2.4. Etude de la réponse transitoire

Le comportement transitoire de la réponse indicielle n'est plus facile à tracer, mais cette fois-ci, il dépend plus du coefficient d'amortissement m .

Il faut faire alors une étude du polynôme de dénominateur $D(p) : D(p) = \frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2m}{\omega_n} p + 1$

- o On pose $x = p \Rightarrow D(x) = \frac{1}{\omega_n^2} x^2 + \frac{2m}{\omega_n} x + 1$ et notant X_1 et X_2 , les solutions de polynôme de $D(x)$.
- o Calculons de de discriminant : $\Delta = \frac{4}{\omega_n^2} (m^2 - 1)$

On distingue donc trois cas d'étude selon la valeur de $m : m > 1, m = 1$ et $m < 1$.

➤ Cas N°1 : $m > 1$

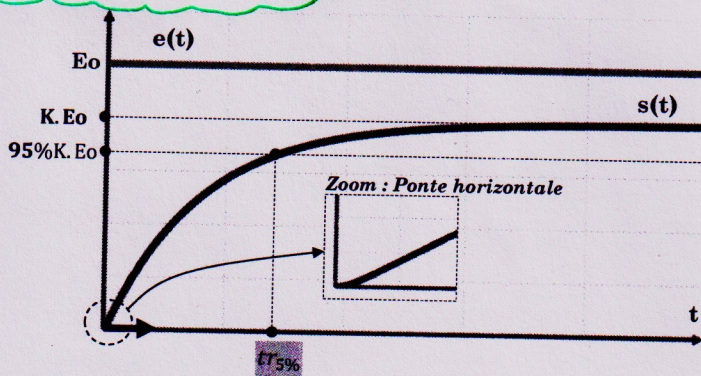
Il existe deux racines réelles : $\omega_1 = \omega_n (m - \sqrt{m^2 - 1})$ et $\omega_2 = \omega_n (m + \sqrt{m^2 - 1})$. La fonction de transfert est alors s'écrit : $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = K \cdot H_1(p) \cdot H_2(p)$ avec $\tau_1 = \frac{1}{\omega_1}$ et $\tau_2 = \frac{1}{\omega_2}$

Les fonctions H_1 et H_2 sont deux fonctions de 1^{er} ordre de pulsation de coupure ω_1 et ω_2 . La réponse indicielle est la suivante :

$$S(p) = K \cdot H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot E(p) \Rightarrow S(p) = \frac{E_0 \cdot K}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Remarques :

- o Forme de la réponse transitoire : exponentielle sans oscillation (jamais la valeur finale est dépassée).
- o Démarrage à zéro avec une pente horizontale
- o Valeur finale : $K \cdot E_0$



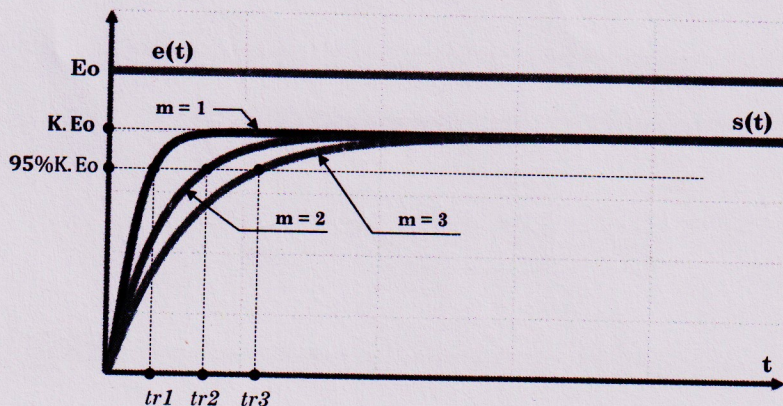
➤ Régime critique : $m = 1$

Il y a deux racines réelles doubles : $\omega_c = m \cdot \omega_n$. La fonction de transfert est alors s'écrit : $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^2}$ avec $\tau = \frac{1}{\omega_c}$

La réponse indicielle est donc :

$$S(p) = K \cdot H(p) \cdot E(p) = \frac{K \cdot E_0}{p(1 + \tau p)^2}$$

Un exemple pour : $K=0.8, \omega_n=10 \text{ rad/s}$ et on prend $m=1, m=2$ et $m=3$.

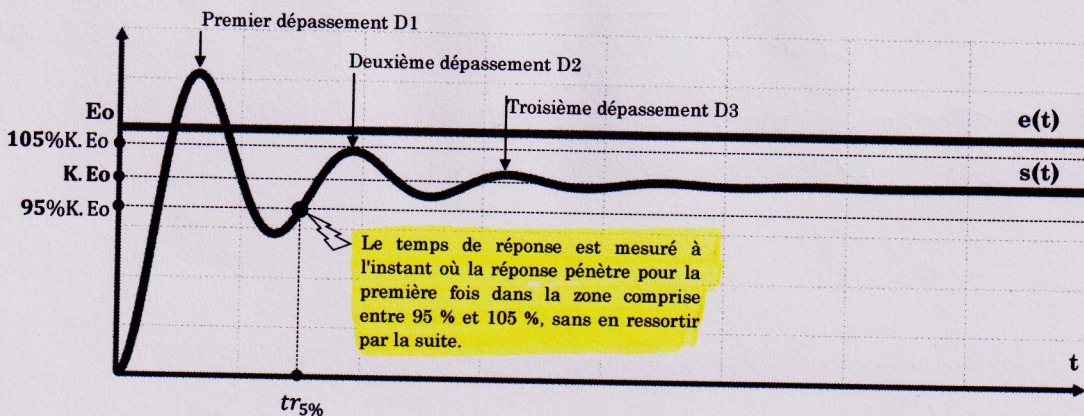


Remarque : On en conclut que le temps de réponse minimal sans dépassement est atteint lorsque $m = 1$.

⇒ Régime pseudopériodique : $m < 1$

Dans ce cas, les racines sont toutes imaginaires : $\omega_1 = \omega_n (m - j\sqrt{1 - m^2})$ et $\omega_2 = \omega_n (m + j\sqrt{1 - m^2})$. La réponse indicielle devient : $S(p) = \frac{E}{P} \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$

Le comportement transitoire de la réponse devient :

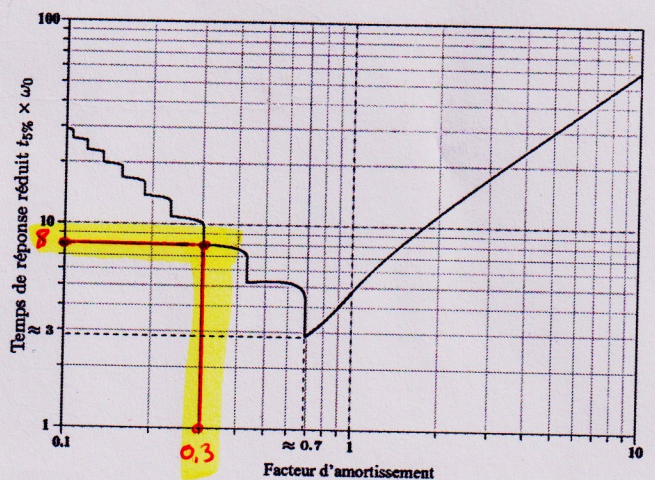


Remarque : Pour ce cas ($m < 1$) le système présente un dépassement, caractérisé par la présence des oscillations d'amplitudes décroissantes.

2.5. Temps de réponse : les abaques

Il n'existe pas, de manière rigoureuse comme le système 1^{er} ordre, une expression exacte permettant de calculer le temps de réponse en fonction des paramètres fondamentaux m et ω_n pour les systèmes d'ordre deux.

Le calcul du temps de réponse est obtenu à partir de l'abaque suivant : en connaissant la pulsation propre et le coefficient d'amortissement, il est possible de déterminer le temps de réponse à 5 %.



Remarque : le temps de réponse est minimum lorsque $m = 0.7$.

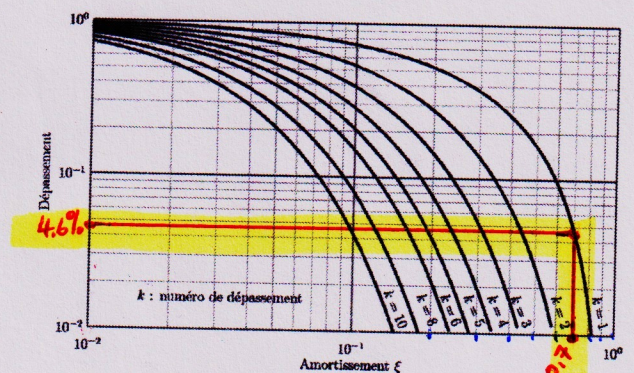
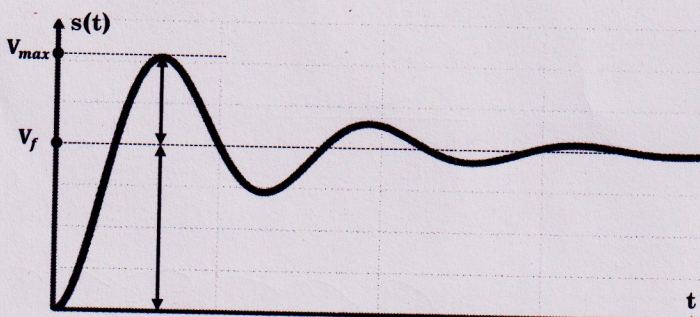
Dans ces conditions : $Tr_{5\%} \times \omega_n = 3$

Exemple : si $m=0.3$ et $\omega_n = 9.34$ rad/s. le temps de réponse est :

$\omega_n \times m = 0.3 \Rightarrow Tr_{5\%} \cdot \omega_n = 8$
 d'où : $Tr_{5\%} = \frac{8}{\omega_n} \Rightarrow Tr_{5\%} = 0.85 s$

2.6. Dépassement indiciel

Le dépassement est un phénomène observé dans les systèmes dynamiques où la réponse dépasse temporairement la valeur finale avant de se stabiliser. Il est souvent lié aux oscillations et à l'amortissement du système.



On définit le premier dépassement par : $D1\% = \frac{V_{max} - V_f}{V_f} \cdot 100$ ou $D1\% = 100 \cdot e^{-\frac{\pi \cdot m}{\sqrt{1 - m^2}}}$

L'abaque ci-dessus permet de connaître la valeur du $Dk\%$ dépassement relatif en fonction du facteur d'amortissement.

Exemple : si $m=0.7$ et $\omega_n=9.34$ rad/s. le 1er dépassement D1 : pour $m=0.7 \Rightarrow D = 4,6\%$

III. Pôles dominants et réduction du modèle

Dans cette section du cours, nous allons nous concentrer sur la réduction des modèles pour les systèmes d'ordre supérieur à 2. Dans ces cas, il est difficile de calculer les caractéristiques transitoires de manière purement algébrique sans recourir à des approximations. Lorsqu'elles sont bien fondées, ces approximations permettent généralement d'obtenir une estimation satisfaisante de ces caractéristiques.

Pour aborder un système complexe, nous allons utiliser comme exemple un système avec une fonction de transfert d'ordre trois ayant des pôles réels : $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 0.5$, $\tau_3 = 0.1$, et un gain $K = 1$.

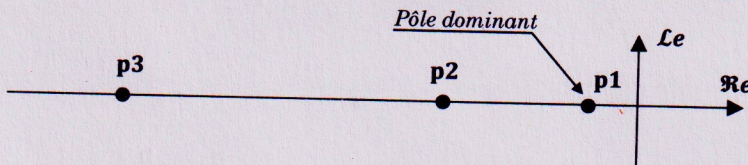
$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$$

Les pôles sont tous réels donc le régime transitoire ne présente pas en conséquence aucune oscillation.

1. Pôles dominants

Les pôles dominants sont ceux qui se trouvent près de l'axe imaginaire sur la carte des pôles. Ils sont associés à des constantes de temps élevées ou à des faibles coefficients d'amortissement. Pour la fonction précédente, les trois pôles sont :

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} = -\frac{1}{5} ; p_2 = -\frac{1}{\tau_2} = -\frac{1}{0.5} ; p_3 = -\frac{1}{\tau_3} = -\frac{1}{0.1}$$

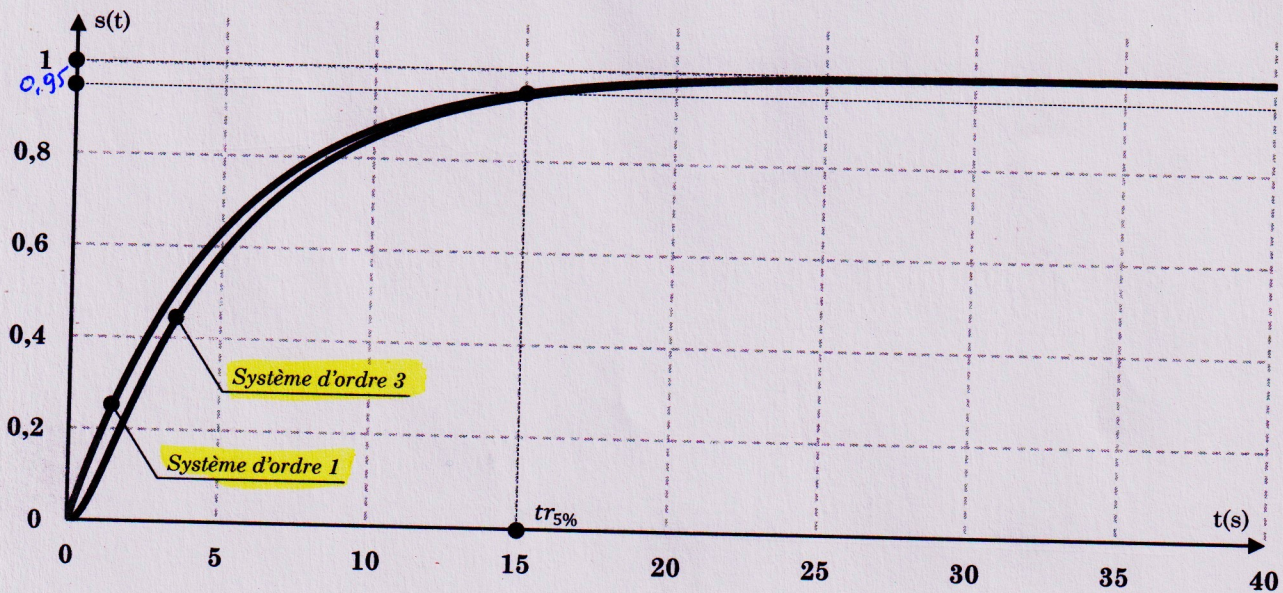


2. Réduction de modèle à pôle dominant

Le comportement transitoire est principalement déterminé par la constante dominante $\tau_1 = 5$, correspondant ainsi au pôle dominant p_1 , qui est le plus proche de l'axe imaginaire. Le temps de réponse est alors approximativement égal à $3\tau_1 = 15$.

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)} \quad \Rightarrow \quad H_r(p) = \frac{K}{1 + \tau_1 p}$$

La figure suivante, illustrant les réponses à un échelon unité, valide cette approximation.



Remarque : L'approximation de la réduction de modèle est confirmée par la réponse des modèles, car on observe qu'ils ont le même temps de réponse et atteignent le même régime permanent, à l'exception d'une légère différence dans la phase transitoire. Cette approximation demeure valable en présence d'un pôle dominant.