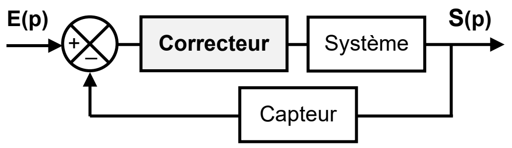
Les systèmes asservis peuvent présenter des défauts de précision, de stabilité ou de rapidité. Le correcteur PID, placé après le comparateur, améliore ces performances grâce à ses actions proportionnelle, intégrale et dérivée. Simple et efficace, il permet de satisfaire les exigences du cahier des charges liées à la stabilité, la précision et la rapidité.



Position de problème de la correction

Les chapitres précédents ont permis d'analyser stabilité, précision et rapidité ; les points essentiels du réglage sont illustrés sur le diagramme de Bode.

- **Stabilité :**

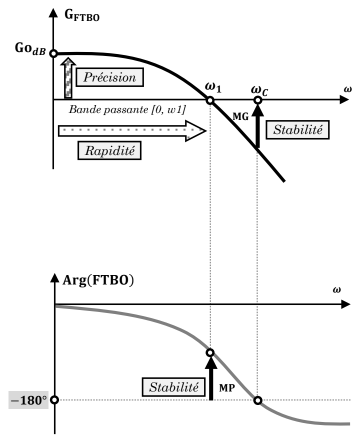
La stabilité s'évalue aux pulsations ω_1 et ω_c ; des marges de gain M_G et de phase M_P élevées garantissant la robustesse du système (**purement stable**).

- **Rapidité :**

La rapidité dépend de la bande passante de la FTBO, définie par la pulsation unitaire ω_1 : plus elle est large, plus le système est rapide.

- **Précision :**

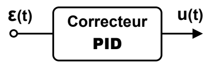
La précision dépend du comportement de la FTBO aux basses fréquences, exprimé par le gain G_0dB. Un système est précis si ce gain est élevé ou si la boucle ouverte comporte plusieurs intégrations.



Conclusion : *Les trois qualités — stabilité, rapidité et précision — ne peuvent être optimisées ensemble. L'automaticien doit donc équilibrer robustesse et précision pour satisfaire au mieux les exigences du cahier des charges.*

Structure générale d'un correcteur PID

Le **correcteur PID** est l'élément central de la régulation, traite l'écart consigne-sortie et génère le signal de commande pour commander les pré-actionneurs.



Le correcteur réalise les actions suivantes :

- **Action proportionnelle (P)** : $u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) \Rightarrow U(p) = K_p \cdot \varepsilon(p)$
- **Action intégrale (I)** : $u(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^T \varepsilon(t)\,dt \Rightarrow U(p) = \frac{1}{T_i\,p} \cdot \varepsilon(p)$
- **Action Dérivée (D)** : $u(t) = T_d \frac{d\,\varepsilon(t)}{dt} \Rightarrow U(p) = T_d\ p\,.\,\varepsilon(p)$

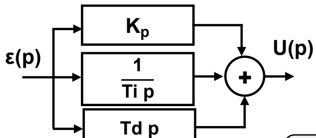
En pratique, ces actions se combinent pour former des correcteurs **P**, **PI**, **PD** ou **PID**.

- **L'action P** améliore la précision et la rapidité, mais peut réduire la stabilité.
- **L'action I** supprime l'écart statique.
- **L'action D** stabilise le système et influe sur la vitesse (ralentissement).

On distingue trois structures pour présenter les actions d'un **PID** :

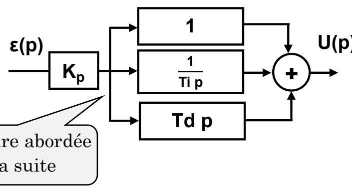
Structure Parallèle

$C(p) = K_p + \frac{1}{Ti\ p} + Td\ p$

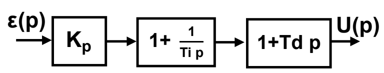


Structure mixte

$C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{Ti\ p} + Td\ p\right)$



Structure série



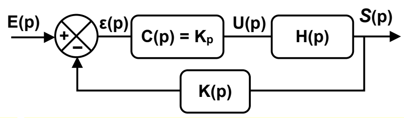
$C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{Ti\ p}\right)(1 + Td\ p)$

Étude et analyse des performances de correcteur PID

Les correcteurs **P**, **PI** et **PD**, couramment utilisés en industrie, seront étudiés pour évaluer leur influence sur les performances d'asservissement et présenter des méthodes de réglage adaptées aux exigences.

1- Correcteur proportionnel : C(p) = Kp

Le signal de commande u(t) est proportionnel au signal d'écart ε(t) :



$U(p) = K_p \cdot \varepsilon(p)$

$\Downarrow$

$C(p) = K_p$

1.1 - Réglage de correcteur proportionnel

Le dimensionnement du correcteur proportionnel vise d'abord la stabilité, en imposant une marge de phase de **40 – 45°** ou de gain de **10 – 15 dB**.

On distingue deux approches :

- **Méthode analytique :** fondée sur le **modèle** du système en boucle ouverte.
- **Méthode graphique :** basée sur l'exploitation du **diagramme de Bode** en boucle ouverte.

☑ Etape de calcul : Méthode analytique

Si on considère la fonction de transfert en boucle ouverte : $H_{bo}(p) = C(p).H(p)$

Donc : $H_{bo}(p) = K_p.\ H(p)$

Etape 1 : trouver la fonction transfert complexe en BO

On commence par déterminer la fonction de transfert complexe en remplaçant la variable **p** par **jω** : $H_{bo}(j\omega) = K_p.\ H(j\omega)$.

Etape 2 : calcul le module et la phase de $H_{bo}(j\omega)$

$|H_{bo}(j\omega)| = K_p.\ |H(j\omega)|$ et $Arg(H_{bo}(j\omega)) = Arg(K_p.\ H(j\omega))$

Etape 3 : Calcul des pulsations unitaire ω_1 ou critique ω_c et la valeur de Kp

Si le cahier des charges impose la marge de gain MG :

Poser la définition de MG : $\begin{cases} MG = 0 - 20\log_{10}(|H_{BO}(j\,\omega_C)|) \\ \text{à } \omega_C :\ Arg\,[H_{BO}(j\,\omega_C)] = -180° \end{cases}$

1- chercher la pulsation critique ωc : résoudre cette équation

$Arg\,[H_{BO}(j\,\omega_C)] = -180° \Rightarrow Arg\,[K_p\,H(j\omega_C)] = -180° \Rightarrow$ Solution c'est ω_c

2 – calculer la valeur de Kp à partir de marge de gain MG imposée

On part de : $MG = 0 - 20\log_{10}(|H_{BO}(j\,\omega_C)|)$

En remplaçant la valeur de ω_c trouvée dans : $MG = -20\log_{10}(|K_p\,H(j\omega_C)|)$

$\Leftrightarrow MG = -20\log_{10}(K_p) - 20\log_{10}(|H(j\omega_C)|)$

D'où : $K_p = 10^{-\frac{MG + 20\log_{10}(|H(j\omega_C)|)}{20}}$ **1**

Si le cahier des charges impose la marge de phase MP :

Poser la définition de **MP** : $\begin{cases} MP = 180 + Arg\,[H_{BO}(j\,\omega_1)] \\ \text{à } \omega_1 :\ |H_{BO}(j\,\omega_1)| = 1 \end{cases}$

1- chercher la pulsation critique ω1 à partir de la marge de phase MP imposée : $MP = 180 + Arg\,[H_{BO}(j\,\omega_1)] \Rightarrow MP = 180 + Arg\,[K_p\,H(j\omega_1)]$

$\Rightarrow$ La solution c'est la pulsation unitaire ω_1

2 – calculer la valeur de Kp :

On part de après le remplacement de la valeur de ω_1 : $|H_{BO}(j\,\omega_1)| = 1$

$\Leftrightarrow |K_p\,H(j\omega_1)| = 1 \Rightarrow K_p\,.\,|H(j\omega_1)| = 1$

D'où : $K_p = \frac{1}{|H(j\omega_1)|}$ **2**

Exemple 1 : On cherche à obtenir une marge de phase **MP = 45 °**

$H_{bo}(p) = K_p . H(p) = \frac{K_p}{p(1+\tau 1\, p)(1+\tau 2\, p)}$ Avec $\tau 1 = 0.1s$ et $\tau 2 = 0.2s$

Etape 1 : $H_{bo}(j\omega) = \frac{K_p}{j\omega(1+\tau 1\, j\omega)(1+\tau 2\, j\omega)}$

Etape 2 : $|H_{bo}(j\omega)| = \frac{K_p}{\omega\sqrt{(1+(\tau 1.\omega)^2)(1+(\tau 2.\omega)^2)}}$

Et $\mathrm{Arg}(H_{bo}(j\omega)) = -90 - \mathrm{Arctg}\left(\frac{(\tau 1+\tau 2).\omega}{1-\tau 1.\tau 2.\ \omega^2}\right)$

Etape 3 : $MP = 180 + \mathrm{Arg}\,[\,H_{BO}(j\,\omega_1)\,]$

$\Rightarrow MP = 180 - 90 - \mathrm{Arctg}\left(\frac{(\tau 1+\tau 2).\omega_1}{1-\tau 1.\tau 2.\ \omega_1^2}\right) = 45° \Rightarrow \omega_1 = 2.8\ rad/s$

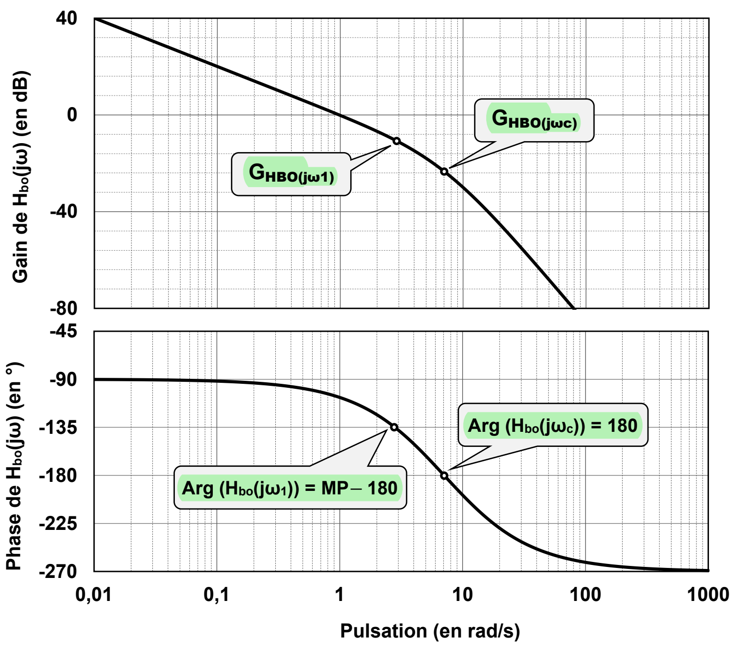
$\Rightarrow$ La valeur de Kp : $|\,K_p\, H(j\omega_1)\,| = 1$

$\Rightarrow \frac{K_p}{\omega_1\sqrt{(1+(\tau 1.\omega_1)^2)(1+(\tau 2.\omega_1)^2)}} = 1 \Rightarrow$ **Kp = 3. 34**

Etape de calcul : Méthode graphique à partir du diagramme de Bode

Cette méthode, appliquée au diagramme de Bode du système non corrigé (**Kp = 1**), permet de déterminer graphiquement le gain **Kp** selon la marge de gain ou de la marge de phase demandée :

Si on considère un système présenté par : $H_{bo}(j\omega) = K_p . H(j\omega)$



Si le cahier des charges impose la marge de gain MG :

Exemple : On désire calculer la valeur de **Kp** afin d'obtenir **MG = 15 dB.**

Trouver la pulsation critique ω_c.

La pulsation critique ω_c est située lorsque la phase : $\mathrm{Arg}\,(H_{bo}(j\omega_c)) = 180°$

Donc : $\omega_c = 7\ rad/s$

Calcul de Kp

Le gain **Kp** est déterminé à partir du gain de $H_{bo}(j\omega_c)$ à la pulsation critique :

Donc : $G_{HBO(j\omega c)} = -23\ dB$

D'après l'équation 1 : $\boxed{K_p = 10^{-\frac{MG\ +\ G_{Hbo(j\omega_c)}}{20}}} \Rightarrow$ **Kp = 2.51**

Si le cahier des charges impose la marge de gain MG :

Exemple : On désire calculer la valeur de **Kp** afin d'obtenir **MP = 45°.**

Trouver la pulsation unitaire ω_1 pour : $MP = 180 + \mathrm{Arg}\,(H_{bo}(j\omega_1))$

La pulsation unitaire ω_1 est située lorsque la phase : $\mathrm{Arg}\,(H_{bo}(j\omega_1)) = MP - 180$

Donc : $\mathrm{Arg}\,(H_{bo}(j\omega_1)) = -135°$ $\Rightarrow \omega_1 = 2.8\ rad/s$

Calcul de Kp

Le gain **Kp** est déterminé à partir du gain de $H_{bo}(j\omega_1)$ à la pulsation unitaire :

Donc : $G_{HBO(j\omega c)} = -10.5\ dB$

D'après l'équation 2 en gain : $\boxed{K_p = 10^{-\frac{G_{Hbo(j\omega_1)}}{20}}} \Rightarrow$ **Kp = 3.35**

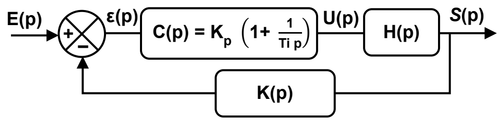
1.2 – Effet du correcteur proportionnel

Le correcteur proportionnel agit sur plusieurs aspects du système (si **Kp** augment) :

- Il **augmente la rapidité**, ce qui peut entraîner l'apparition d'un **dépassement** dans la réponse temporelle.
- Il **améliore la précision**, mais ne permet pas d'annuler totalement l'écart statique.
- Il **réduit la stabilité** du système en diminuant les marges de gain et de phase.

2 – Correcteur Proportionnel – Intégral (PI)

Dans ce ²type de correcteur, le signal de commande u(t) est lié au signal d'écart ε(t) par : $u(t) = K_p\left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}.\int \varepsilon(t)\,dt\right) \Rightarrow C(p) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i\, p}\right)$



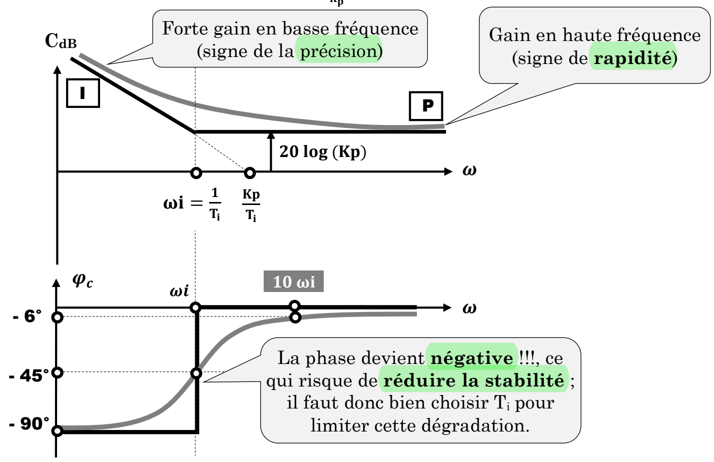
Nous retiendrons deux méthodes de réglage d'un tel correcteur :

- ✓ Critère de **marge de phase + 6 °**,
- ✓ Critère de **compensation du pôle dominant**.

2.1– Analyse de correcteur PI : Diagramme de Bode

La fonction de transfert complexe du correcteur s'écrit :

$C(j\omega) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i\, j\omega}\right) \Rightarrow C(j\omega) = \frac{1+T_i\, j\omega}{\frac{T_i}{K_p} j\omega}$



Ce correcteur présente les caractéristiques remarquables suivantes :

- La phase est de **– 45°** lorsque $\omega = \omega_i$;
- La phase est de **– 6°** pour $\omega = 10\cdot\omega_i$; (Meilleur point de réglage)
- La phase atteint **– 84°** pour $\omega = \omega_i / 10$.

2.2– Réglage par le Critère de marge de phase + 6°

L'objectif est de configurer le correcteur afin d'assurer une **marge de stabilité suffisante**. Pour cela, la procédure se décompose en deux étapes :

Notes : La plupart des cas, le cahier des charges impose la marge de phase **MP**

Etape 1 : Calcul du gain Kp afin d'obtenir MP' = MP + 6°

Ajuster d'abord le gain Kp en posant $1/T_i = 0$ $(C(p) = K_p)$, afin d'obtenir une marge de phase supérieure de +6°, anticipant l'effet intégrateur : $H_{BO}(j\,\omega_1) = K_p . H(j\omega)$

Donc : $MP' = MP + 6°$

On pose la définition de MP' : $\begin{cases} MP' = 180 + \mathrm{Arg}\,[\,H_{BO}(j\,\omega_1)\,] & \text{(i)} \\ \text{à } \omega_1 :\ |\,H_{BO}(j\,\omega_1)| = 1 & \text{(ii)} \end{cases}$

✓ La condition **(i)** permet d'obtenir la pulsation unitaire ω_1

✓ On remplace ω_1 dans la condition **(ii)** pour obtenir le gain **Kp**

Étape 2 : choix et calcul de la constante d'intégration Ti

L'action intégral est choisie de la façon suivante :

Si la marge de phase : MP ≥ 45 °	Si la marge de phase : MP < 45 °
$\omega i = \frac{1}{Ti} = \frac{\omega 1}{10}$	$\omega i = \frac{1}{Ti} = \frac{\omega 1}{4}$

Remarque : si $M_P = 45°$, donc on doit choisir $\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_1}{10}$, alors la marge de phase diminue d'environ **6°**.

Et pour cela que l'on dimensionne le correcteur avec $M_P' = M_P + 6°$ pour compenser cet effet. Selon le choix de T_i, la stabilité du système peut être affectée.

2.3 – Réglage par le Critère de compensation de pole dominant

Cette méthode repose sur le pôle dominant, responsable de la dynamique lente. On choisit la pulsation de coupure de l'intégrateur $\omega_i = 1/T_i$ égale à celle du **pôle dominant** (la pole ayant la **constante de temps la plus grande**) , puis on ajuste K_p pour obtenir la marge de phase souhaitée et assurer la stabilité du système.

Exemple : $H_{BO}(p) = C(p)\cdot\frac{4}{(1+T1\ p)(1+T2\ p)}$ Avec : T1 = 0.1 s et T2 = 10 s

⇨ La constante de temps dominante : **TD = T2** (*c'est la grande constante de temps !*)

⇨ Choix de Ti : Ti = TD ⟹ **Ti = T2** ⟹ **Ti = 10 s**

⇨ Donc la fonction en BO devient : $H_{BO}(p) = Kp\ \frac{\cancel{1+T2\ p}}{T2\ p}\cdot\frac{4}{(1+T1\ p)\cancel{(1+T2\ p)}} = \frac{4\ Kp}{T2\ p\,(1+T1\ p)}$

$H_{BO}(j\omega) = \frac{4\ Kp}{10\ j\omega\ (1+0.1\ j\omega)}$	Module	$\lvert H_{BO}(j\omega)\rvert = \frac{4\ Kp}{10\ \omega\ \sqrt{1+(0.1\ \omega)^2}}$
	Phase	$\varphi\ (H_{BO}(j\omega)) = -90 - \arctan(0.1\ \omega)$

⇨ On pose la définition de MP : $\begin{cases} MP' = 180 + Arg\,[\,H_{BO}(j\,\omega_1)\,] & (i) \\ \text{à } \omega_1 : \ \lvert H_{BO}(j\,\omega_1)\rvert = 1 & (ii) \end{cases}$

✓ La condition **(i)** permet d'obtenir la pulsation unitaire ω_1 : **ω1 = 10 rad/s**

✓ On remplace ω_1 dans la condition **(ii)** pour obtenir le gain **Kp** : **Kp = 35.35**

⇨ Correcteur PI obtenu : $C(p) = 35.35\left(1 + \frac{1}{10\ p}\right)$

2.4 – Effet du correcteur proportionnel – Intégral (PI)

L'introduction d'un correcteur PI a plusieurs impacts sur le comportement du système :

✓ **Rapidité :** le gain proportionnel **améliore** légèrement **la rapidité**, mais peut provoquer un **dépassement** dans la réponse temporelle.

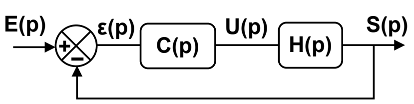
✓ **Précision :** grâce à l'action intégrale, le correcteur **annule** complètement **l'écart statique**, assurant ainsi une **précision parfaite** à régime permanent.

✓ **Stabilité :** l'ajout de l'intégrateur entraîne une **réduction des marges** de gain et de phase, ce qui **diminue la stabilité** globale du système.

3 – Correcteur proportionnel – dérivé (PD)

Dans ce type de correcteur, le signal de commande **u(t)** est lié au signal d'écart **ε(t)** par :

$u(t) = Kp\left(\varepsilon(t) + Td.\frac{d\,\varepsilon(t)}{dt}\right) \Rightarrow C(p) = K_p\,(1+Td\ p)$



Objectifs recherchés autour de la pulsation unitaire ω_1 :

- **Renforcer la stabilité** du système lorsque **la marge de phase** s'avère insuffisante.
- **Augmenter la rapidité** du système sans compromettre la stabilité globale du système.

> **Remarque :** Le correcteur PD pur étant non causal, on lui ajoute en pratique un filtre passe-bas, formant ainsi un **correcteur à avance** de phase qui assure la causalité du système tout en assurant les objectifs du correcteur PD.

3.1 – Analyse d'un correcteur à avance de phase

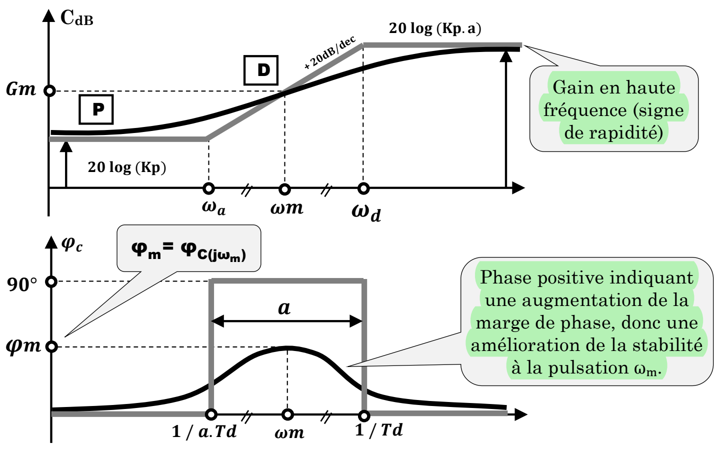
Le correcteur à avance de phase est défini par la fonction de transfert suivant :

$C(p) = Kp\left(\frac{1+a.Td.p}{1+Td.p}\right)$ avec **a > 1**

Note : *Si **a** est **très grand** on retrouve un correcteur proportionnel dérivé.*

Diagramme de Bode de correcteur :

$$C(j\omega) = Kp\left(\frac{1+a.Td.j\omega}{1+Td.j\omega}\right) = Kp\left(\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_a}}{1+j\frac{\omega}{\omega_d}}\right) \quad \text{Avec } \omega_a = \frac{1}{a\,Td} < \omega_d = \frac{1}{Td}$$



À partir de de diagramme de Bode, on tire les relations caractéristiques du correcteur à avance de phase : **ses relations les plus intéressants !!!**

La pulsation ω_m	La phase maximale à ω_m	Le module de correcteur à ω_m
$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}\ Td}$	$\varphi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$	$\lvert C(j\omega_m)\rvert = Kp.\sqrt{a}$

> **Remarque importante :** Le correcteur à avance de phase apporte un gain de phase φ_m autour de ω_m. Au niveau d'asservissement, en plaçant ω_m à la pulsation unitaire ω_1, la marge de phase et donc la stabilité du système augmentent.

3-2 - La procédure de calculer les paramètres de correcteur Kp, Td et a :

Le cahier des charges impose :

- La **bande passante** caractérisée par la pulsation unitaire **ω1**
- La marge de phase **MP** souhaité à la pulsation unitaire désirée

On considère une fonction complexe en boucle ouverte : $H_{BO}(j\omega) = C(j\omega).H(j\omega)$

- Le module de H_{BO} : $\lvert H_{BO}(j\omega)\rvert = \lvert C(j\omega)\rvert\,.\,\lvert H(j\omega)\rvert$
- Argument de la H_{BO} : $\varphi_{H_{BO}(j\omega)} = \varphi_{C(j\omega)} + \varphi_{H(j\omega)}$

Etape 1 – Choix de la pulsation de réglage : placer la pulsation du correcteur ω_m à la pulsation unitaire ω_1 souhaitée : $\omega_m = \omega_1$

Étape 2 – Calcul la phase à apporter à la pulsation unitaire ω1 :

On détermine la phase φ_m à apporter pour atteindre la marge de phase **MP** à la pulsation unitaire $\omega_m = \omega_1$: $MP = 180 + \varphi_{H_{BO}(j\,\omega m)}$

$\Rightarrow MP = 180 + \varphi_{C(j\omega_m)} + \varphi_{H(j\omega_m)}$

Sachant que : $\varphi_m = \varphi_{C(j\omega_m)} \Rightarrow \varphi_m = MP - 180 - \varphi_{H(j\omega_m)}$

Étape 3 – Détermination du paramètre a : une fois φ_m est déterminée, on calcul, le paramètre **a** donc : $\varphi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \Rightarrow a = \frac{1+\sin(\varphi_m)}{1-\sin(\varphi_m)}$

Étape 4 – Détermination de la constante Td : Connaissant a et ωm, on déduit Td par : $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}\cdot T_d} \Rightarrow T_d = \frac{1}{\omega_m\cdot\sqrt{a}}$

Étape 5 – Calcul du gain Kp : Enfin, on ajuste **Kp** pour garantir un gain unitaire de la H_{BO} à ω_1 : $\lvert C(j\omega_m)\rvert\cdot\lvert H(j\omega_m)\rvert = 1$

Or : $\lvert C(j\omega_m)\rvert = K_p\cdot\sqrt{a} \Rightarrow K_p = \frac{1}{\sqrt{a}\cdot\lvert H(j\omega_m)\rvert}$ avec : $\omega_m = \omega_1$