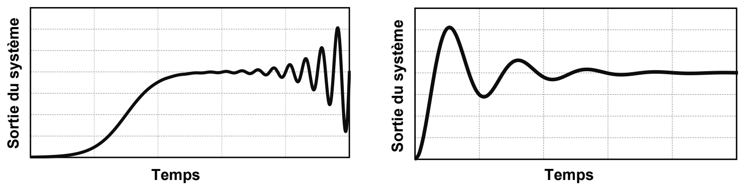
La **stabilité** est un critère essentiel des systèmes asservis. Elle traduit la capacité du système à **maintenir une sortie bornée pour une entrée bornée**, garantissant un comportement prévisible face aux perturbations. Un système instable produit des réponses divergentes, compromettant ainsi sa fiabilité et son adéquation au fonctionnement attendu.



Système instable **Système stable**

Il existe deux méthodes à étudie ici :

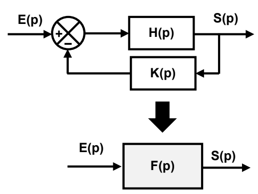
- Analyse de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée : **FTBF**
- Analyse de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte : **FTBO**

Analyse de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée

La stabilité d'un système asservi s'analyse via les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée : leur position détermine directement si le système est stable ou instable.

1- Les pôles d'un système en boucle fermée

Considérons le schéma fonctionnel d'un système de commande en boucle fermée. La fonction de transfert en boucle fermée, notée F(p), s'exprime comme suit :



☑ Fonction de transfert en boucle ouverte :

FTBO(p) = K(p).H(p)

☑ Fonction de transfert en boucle fermée : $\mathbf{FTBF(p) = \dfrac{H(p)}{1 + FTBO(p)}}$

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit : $\mathbf{F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}}$

Les pôles correspondent aux racines de **D(p)**, soit **p = a + j b**, où **a** est la partie réelle et **b** la partie imaginaire.

Exemple 1 : Système de 1^er^ ordre et de 2^ème^ ordre

Système de 1^er^ ordre	Système de 2^ème^ ordre
$F(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$	$F(p)=\dfrac{K}{1+\frac{2m}{\omega n}p+\frac{1}{\omega n^2}p^2}$ Pour $m<1$
$P_1 = -\,{}^{1}/_{\tau}$	$\begin{cases} p_1 = -m\,\omega_n - j\,\omega_n\sqrt{1-m^2} \\ p_2 = -m\,\omega_n + j\,\omega_n\sqrt{1-m^2} \end{cases}$

2- Critères de stabilité d'un système en boucle fermée : analyse des pôles

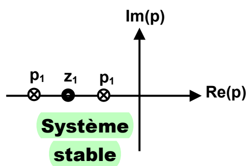
La stabilité d'un système, quel que soit son ordre, peut être évaluée en analysant la position de ses pôles, selon le critère suivant :

> Un système linéaire est stable si, et seulement si, tous les pôles de sa fonction de transfert possèdent une partie réelle strictement négative, c'est-à-dire : $\Re e\,(p) < 0$.

Exemple 2 :

Système 1 : $F(p)=\dfrac{6(p+3)}{(p+2)\,(p+4)}$

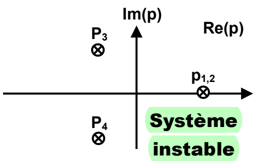
⟹ Zéros : $z_1 = -3$ | Pôles : $p_1 = -2$ et $p_2 = -4$



Le système est **stable** car tous les pôles à partie réelle négative

Système 2 : $F(p) = \dfrac{3}{(p-1)^2\,(p^2+p+1)}$

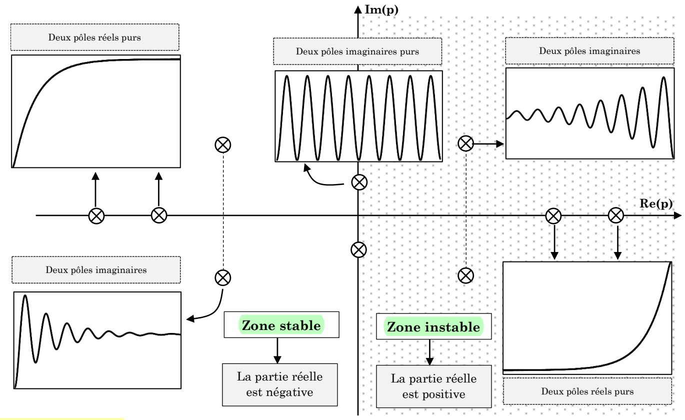
⟹ Pôles : $p_{1,2} = 1$ et $p_{3,4} = -0.5 \pm j\,0.87$



Le système est **instable** car les pôles **p1** et **p2** présente la partie réelle positive.

2- Allure de la réponse transitoire en fonction de la position des pôles

Pour analyser le comportement transitoire d'un système, on étudie la position des pôles. Ce graphique montre, pour un système du second ordre, le lien entre pôles et forme de la réponse indicielle.



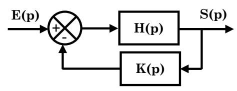
Conclusion :

L'analyse des pôles, vérifie la stabilité mais reste limitée : elle ne décrit pas les oscillations ni la dynamique fine. De plus, sans fonction de transfert, elle devient inapplicable, soulignant l'importance d'autres techniques complémentaires.

Analyse de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

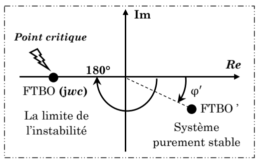
1- Point critique

On considère le schéma bloc d'un système asservi illustré dans la figure ci-après :



Donc : $\mathbf{FTBF(p) = \dfrac{H(p)}{1 + FTBO(p)}}$

La stabilité d'un système asservi s'analyse par l'équation caractéristique : **1 + FTBO(p) = 0**



Cette technique est effectuée en domaine complexe :

Donc : **1 + FTBO(jω) = 0** ⇒ **FTBO(jω) = − 1.**

> Le point « **−1** » du diagramme de Bode, défini par **|FTBO(jω) | = 1** et un déphasage de **−180°**, est dit critique car il est très important dans l'analyse de stabilité par le critère de Nyquist.

2- Critère de stabilité en boucle ouverte

Un système est stable en boucle fermée si, à la pulsation critique ω_c où $\mathbf{Arg\,(FTBO(j\omega_C)) = -180°}$, le gain vérifie $\mathbf{|\,FTBO(j\omega_C)\,| < 1}$, soit $\mathbf{G_{FTBO}(j\omega_C) < 0\ dB}$.

- **Système N°1** : Système instable

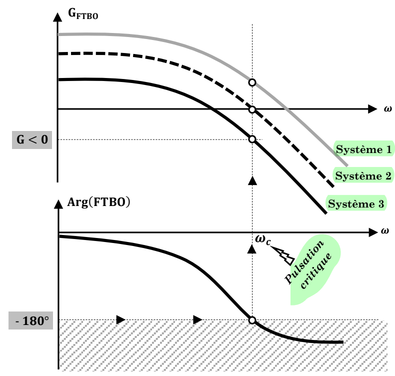
  À $\omega = \omega_c$ ⟹ **G > 0**

- **Système N°2 :** Système à la limite de l'instabilité :

  À $\omega = \omega_c$ ⟹ **G = 0**

- **Système N°3** : Système stable

  À $\omega = \omega_c$ ⟹ **G < 0**

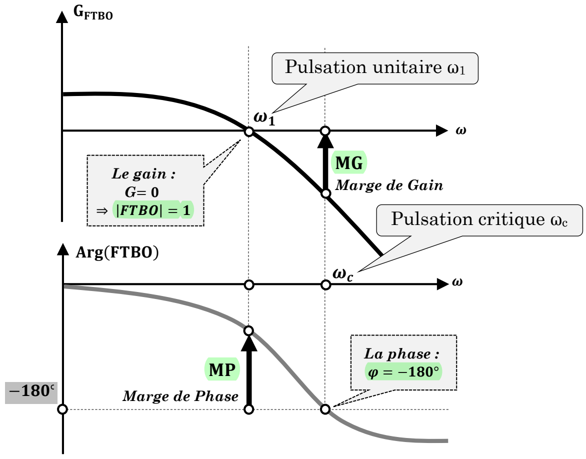


Note importante pour les systèmes 1^er^ et 2^ème^ ordre :

La phase minimale d'un système du premier ordre est limité à **− 90°**, tandis que celle d'un second ordre peut atteindre **−180°**. Ainsi, ni un premier ni un second ordre **ne peuvent dépasser le point critique −1** en boucle ouverte, ce qui les rend intrinsèquement stables en boucle fermée.

3- Les marges de stabilité

Lorsqu'un système opère à la limite de stabilité, de faibles variations de paramètres, comme les effets de température, peuvent provoquer l'instabilité. Pour estimer la sécurité vis-à-vis du point critique −1, on utilise les courbes de gain et de phase de la FTBO.



Ces courbes permettent d'appliquer deux critères complémentaires : **la marge de gain et la marge de phase**, qui quantifient respectivement l'écart en gain ou en phase avant d'atteindre l'instabilité.

☑ Marge de gain MG

C'est la distance en dB du point critique (**– 180° ; 0 dB**) au point d'intersection du diagramme de Bode avec la droite **ϕ = – 180°**. On note ω_C la pulsation (critique) pour laquelle : **$\text{Arg}\,[\,\text{FTBO}(j\,\omega_C)\,] = -180°$**.

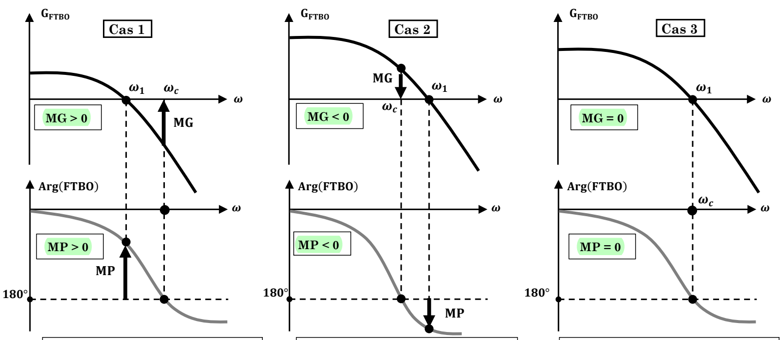
$$\begin{cases} MG = 0 - 20\log_{10}(|\,\text{FTBO}(j\,\omega_C)|) \\ \text{à } \omega_C : \quad \text{Arg}\,[\,\text{FTBO}(j\,\omega_C)\,] = -180° \end{cases}$$

☑ Marge de phase MP

C'est la distance en degrés du point critique (– **180° ; 0 dB**) au point d'intersection du diagramme de Bode avec la droite **G = 0** dB. On note ω_1 la pulsation (au "gain" unité «1 ») pour laquelle : $|\,\text{FTBO}(j\,\omega_1)\,| = 1\ (0\ dB)$.

$$\begin{cases} MP = \text{Arg}[\,\text{FTBO}(j\,\omega_1)\,] - (-180) \\ \text{à } \omega_1 : \quad |\,\text{FTBO}(j\,\omega_1)\,| = 1 \end{cases}$$

On distingue :



Système stable | **Système instable** | **Système oscillant**

Remarque importante :

- Un système est considéré comme stable uniquement si sa marge de gain MG ou sa marge de phase MP est **strictement positive**.
- On peut aussi juger la stabilité par les pulsations trouvées. Un système est stable si est seulement si **$\omega_1 < \omega_C$**

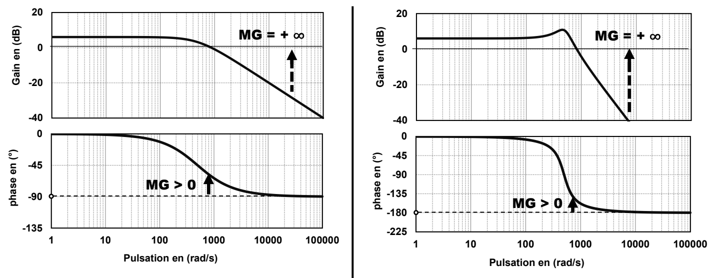
En pratique, on recommande généralement :

- Une marge de gain comprise entre 10 dB et 15 dB,
- Une marge de phase située entre 40° et 45°.

Ces valeurs offrent un bon compromis entre performance dynamique et sécurité vis-à-vis des incertitudes du modèle ou des perturbations extérieures.

Cas particuliers :

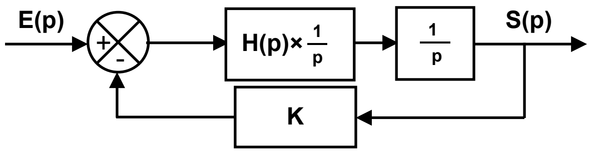
- Les systèmes du premier et du deuxième ordre, en boucle fermée, sont intrinsèquement stables car leur déphasage n'atteint jamais −180°, les empêchant d'atteindre le point critique et l'instabilité. Donc :



Système de 1er ordre | **Système de 2ème ordre**

	Système 1er ordre	Système 2ème ordre
Marge de gain	**MG = + ∞**	**MG = + ∞**
Marge de phase	**MP > 0**	**MP > 0**

- La présence d'une intégration en boucle ouverte introduit **– 90° de déphasage**, rapprochant le système du point critique et accroissant le **risque d'instabilité**. Un second intégrateur accentue ce risque, malgré une meilleure **précision statique du système**.



La phase de FTBO :

$\varphi(j\omega) = \text{Arg}\left[\frac{1}{(j\omega)^2}\right] + \text{Arg}\,[\,K.H(j\,\omega)\,]$

⇒ **$\varphi(j\omega) = -180 + \text{Arg}\,[\,K.H(j\,\omega)\,] < -180$** ➡ **Système devient instable !!!!**